

تمرین های فصل سری و انتگرال فوریه

۱- سری فوریه ی توابع زیر را به دست آورید و چهار جمله ی اول مخالف صفر هر کدام را بنویسید.

a)

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

سپس با استفاده از سری فوریه ی آن ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & 0 < x < 1 \\ 3 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ \cos^2 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

e)

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad -\pi < x < \pi$$

f)

$$f(x) = x + \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

g)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < 0 \\ \sin \frac{\pi x}{3}, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

h)

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 < x < L \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-x}, & -L < x < 0 \end{cases}$$

۲- با فرض آنکه سری فوریه ی متناظر با تابع متناوب $f(x)$ با دوره ی تناوب T در بازه ی $(-T/2, T/2)$ به طور یکنواخت به $f(x)$ همگرا می شود، تساوی پارسوال (Parseval's Identity) را اثبات کنید:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

راهنمایی: سری فوریه ی متناظر با $f(x)$ را نوشته، طرفین آن را در $f(x)$ ضرب نموده و سپس از طرفین آن از $-T/2$ تا $T/2$ انتگرال بگیرید.

۳- تساوی های زیر را اثبات کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{w^3 \sin(wx)}{w^4 + 4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx + w \sin wx}{1 + w^2} dw = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \pi e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(w\pi)}{1 - w^2} \sin(wx) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

۴- با فرض زوج بودن تابع $f(x)$ انتگرال فوریه ی آن را به دست آورید ($a > 0$).

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$